

La simulazione del moto planetario col foglio elettronico/1

Lo studio della gravitazione di Newton è certamente uno dei momenti più importanti per la formazione scientifica di uno studente liceale. La possibilità di simulare un moto planetario può essere uno stimolo per approfondimenti ed un modo per potenziare la padronanza delle leggi della dinamica e della cinematica.

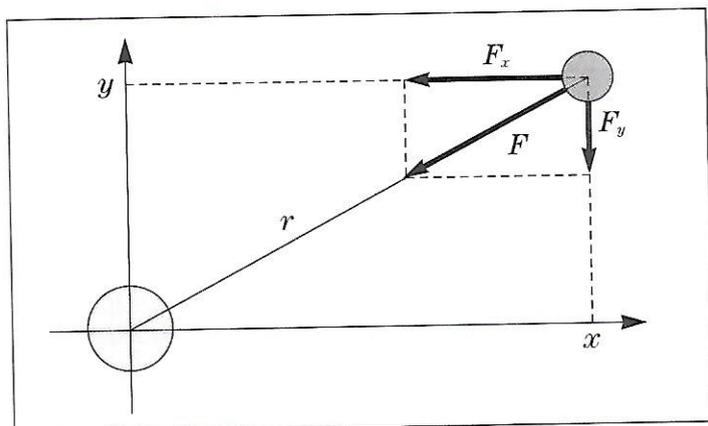
FABIO FILIPPI

La rilettura delle *Lezioni di Feynman*

Feynman affrontò la questione nelle sue celebri *Lectures* [1]. Proprio quel passo che prendiamo ora in considerazione, è stato inserito nei *complementi* al capitolo 9 della altrettanto nota *Fisica di Berkley* [2]. Vale la pena ricordare anche il riesame condotto da D.L. e J.R. Goodstein [3] di una lezione (inedita) di Feynman sul moto dei pianeti, se non altro per sottolineare l'interesse del grande fisico statunitense per l'argomento.

«Risolviamo ora realmente il problema...», scrive il nostro, accingendosi a descrivere una soluzione numerica alle equazioni del moto di un corpo, sottoposto ad una forza centrale¹. Per la simulazione, si può fissare un sistema di riferimento cartesiano, nella cui origine si pone uno dei due corpi. Questi interagiscono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Immaginiamo un sistema composto da due corpi di masse molto diverse come possono essere, per esempio, la Terra ed il Sole, in modo tale da poter considerare che il moto sia, con buona approssimazione, quello della Terra attorno al Sole².



E poniamo dunque il Sole nell'origine del sistema cartesiano e, a distanza r , la Terra sulla quale agisce la forza di gravità. Quest'ultima ha due componenti, F_x e F_y , così come x e y sono le componenti della distanza r . Se si formula l'ipotesi che il moto e l'interazione gravitazionale avvengano sul piano XY , per simulare il moto è sufficiente definire le *condizioni iniziali*, in altre parole assegnare i valori di posizione (x, y) e velocità (v_x, v_y) . La legge di gravitazione universale in forma scalare è:

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

Osservando la fig. 1 si possono dedurre le componenti della forza dirette lungo gli assi. Basta considerare i triangoli costituiti dalle componenti della forza e dalla forza stessa e dalle componenti della posizione della Terra e la distanza della Terra dal Sole; essi sono simili e questa considerazione ci permette di scrivere:

$$\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r} \quad (2)$$

cioè:

$$F_x = -|F| \frac{x}{r} = -G \frac{Mmx}{r^3} \quad (3)$$

■ ■ ■

1. È definita come *forza centrale* una forza $F(r)$ che in ogni punto dello spazio è esattamente orientata verso o da un punto particolare.
2. Due corpi legati gravitazionalmente ruotano attorno al comune centro di massa.

FIG. 1 La forza di gravità è applicata sulla Terra e diretta verso il Sole.

e analogamente per le componenti y :

$$F_y = -G \frac{Mmy}{r^3} \quad (4)$$

Si nota che quando x o y sono positive, le forze F_x e F_y sono negative. Per la seconda legge della dinamica, questa forza produce un'accelerazione sulla massa della Terra, così si possono scrivere le seguenti due uguaglianze:

$$ma_x = -G \frac{Mmx}{r^3} \quad (5)$$

$$ma_y = -G \frac{Mmy}{r^3} \quad (6)$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Per rendere le successive elaborazioni più immediate, conviene supporre che l'unità di tempo o la massa del Sole siano prese in modo tale che $GM = 1$.

Con queste semplificazioni la (5) e la (6) si trasformano in:

$$a_x = -\frac{x}{r^3} \quad (7)$$

$$a_y = -\frac{y}{r^3} \quad (8)$$

Dal punto di vista operativo occorre costruire una tabella a colonne che contengano i valori calcolati passo passo per x e y , v_x e v_y con le procedure spiegate in seguito, a_x e a_y con l'ausilio delle equazioni (5) e (6); per questi due ultimi calcoli conviene costruire altre due colonne utili, una per r ed una per $1/r^3$.

Si può incominciare lo studio del moto assegnando la posizione e la velocità iniziali in termini di componenti al tempo $t = 0$: $x(0)=0.500$, $y(0)=0$, $v_x(0)=0$ e $v_y(0)=1.650$. Da questi si trovano i valori di $r(0)=0.500$, $1/r^3(0)=8.000$, $a_x(0)=-4.000$ e $a_y(0)=0.000$.

Ora occorre calcolare le velocità e le posizioni successive ed iterare il procedimento per il numero di passi che si vuole. Si deve tenere conto che l'accelerazione cui è sottoposto il pianeta orbitante, la Terra, varia in ogni intervallo di tempo, per piccolo che possa essere.

Nelle figure 3-4 sono riportati i risultati di una simulazione effettuata utilizzando un comune foglio elettronico.

Qui di seguito sono indicati i passi per ottenere il grafico rappresentante la simulazione desiderata.

Nella cella A2 si inserisce l'intervallo di tempo (Dt) sul quale calcolare le posizioni successive. Nell'esempio riportato in fig. 2 vale 0,1.

Nella cella B2 si può inserire l'istante iniziale che può essere 0 o un numero qualunque. Nella cella B3 si riporta la formula [=B2+\$A\$2] la quale calcola il tempo successivo all'istante iniziale dopo l'intervallo di tempo assegnato nella cella A2. Si può copiare questa formula nelle celle sottostanti alla B3.

Nella cella C2 va inserita la posizione iniziale x (0,5).

Nella Cella F2 si inserisce la posizione iniziale y (0).

Nella cella I2 va inserito il valore della distanza r , [=RADQ(C2^2+F2^2)], secondo l'equazione $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$.

FIG. 2 Come si presenta il foglio elettronico dopo l'impostazione delle formule.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Dt	t	x	vx	ax	y	vy	ay	r	r3	1/r^3
2	0,10	0,00	0,50	-0,40	-4,00	0,00	1,63	0,00	0,50	0,13	8,00
3		0,10	0,46	-0,80	-3,96	0,16	1,49	-1,40	0,49	0,12	8,60
4		0,20	0,38	-1,12	-3,19	0,31	1,23	-2,62	0,49	0,12	8,40
5		0,30	0,27	-1,32	-2,01	0,43	0,90	-3,25	0,51	0,13	7,49
6		0,40	0,14	-1,40	-0,86	0,52	0,57	-3,29	0,54	0,16	6,26
7		0,50	0,00	-1,40	0,02	0,58	0,28	-2,95	0,58	0,20	5,06
8		0,60	-0,14	-1,34	0,58	0,61	0,03	-2,48	0,63	0,25	4,06
9		0,70	-0,28	-1,25	0,91	0,61	-0,17	-2,01	0,67	0,31	3,28
10		0,80	-0,40	-1,14	1,08	0,60	-0,33	-1,60	0,72	0,37	2,68
11		0,90	-0,52	-1,03	1,16	0,56	-0,46	-1,26	0,76	0,45	2,24
12		1,00	-0,62	-0,91	1,18	0,52	-0,55	-0,98	0,81	0,53	1,90
13		1,10	-0,71	-0,79	1,17	0,46	-0,63	-0,76	0,85	0,61	1,64
14		1,20	-0,79	-0,68	1,14	0,40	-0,69	-0,58	0,89	0,69	1,44
15		1,30	-0,86	-0,57	1,10	0,33	-0,73	-0,42	0,92	0,78	1,29
16		1,40	-0,92	-0,46	1,07	0,26	-0,76	-0,30	0,95	0,86	1,16
17		1,50	-0,96	-0,36	1,03	0,18	-0,78	-0,19	0,98	0,94	1,07
18		1,60	-1,00	-0,26	0,99	0,10	-0,79	-0,10	1,00	1,01	0,99
19		1,70	-1,02	-0,17	0,95	0,02	-0,79	-0,02	1,02	1,07	0,93
20		1,80	-1,04	-0,07	0,92	-0,05	-0,79	0,05	1,04	1,13	0,88
21		1,90	-1,05	0,01	0,89	-0,13	-0,78	0,11	1,06	1,18	0,85
22		2,00	-1,05	0,10	0,86	-0,21	-0,76	0,17	1,07	1,22	0,82
23		2,10	-1,04	0,18	0,83	-0,29	-0,74	0,23	1,08	1,24	0,80
24		2,20	-1,02	0,26	0,81	-0,36	-0,71	0,29	1,08	1,26	0,79
25		2,30	-0,99	0,34	0,78	-0,43	-0,67	0,34	1,08	1,26	0,79

In J2 va inserito [=I2^3].
In K2 va inserito [=1/J2].

Le formule contenute nelle celle I2, J2 e K2 possono essere copiate nelle celle sottostanti. Ovviamente compariranno degli 0 (I2 e J2) e #DIV0! (K2) che sta a significare che si è diviso per 0, un'operazione illecita. Ma questo non deve preoccupare. Quando le posizioni successive del corpo saranno dedotte, in queste celle compariranno i numeri giusti.

Nella cella E2 va inserito il valore della componente x dell'accelerazione secondo la (5) [= -C2*K2].

Nella cella H2 va inserito [= -F2*K2] in analogia a quanto detto per la cella E2.

Anche le formule contenute in queste ultime celle possono essere copiate nelle celle sottostanti con le considerazioni su #DIV0! fatte sopra.

Nella cella D2 va inserito il nuovo valore della componente x della velocità, [=0+E2*\$A\$2], secondo l'equazione $v_x = v_{0x} + a_x \Delta t$.

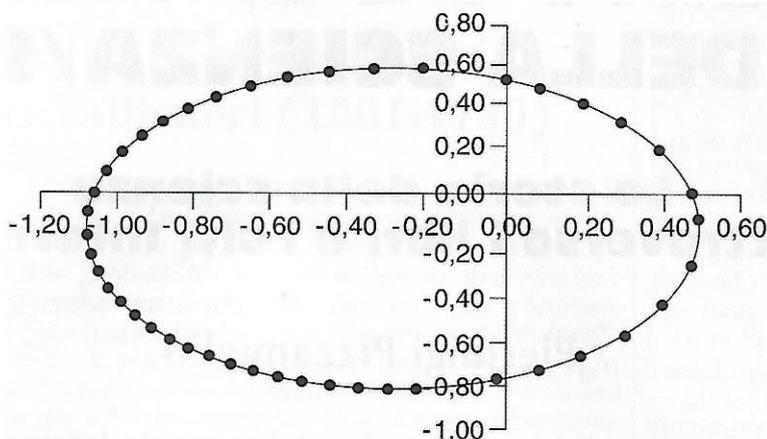


FIG. 3 Il grafico della simulazione ottenuta con i dati elaborati dal foglio elettronico.

Nella cella G2 va inserito [=1,63+H2*\$A\$2] in analogia a quanto detto per la D2. Ora è possibile copiare queste formule nelle celle sottostanti.

Finalmente si possono scrivere le equazioni che permettono di evolvere il sistema.

In C3 [=C2+D2*\$A\$2].

In F3 [=F2+G2*\$A\$2].

In D3 [=D2+E3*\$A\$2].

In G3 [=G2+H3*\$A\$2].

Ora è possibile copiarle in tutte le celle per il numero di righe fissato.

Fabio Filippi

Liceo Scientifico «A. Einstein» - Rimini

Riferimenti bibliografici

- [1] R.P. Feynman - R.B. Leighton - M. Sands, *La fisica di Feynman - The Feynman Lectures* (edizione bilingue), Masson, Milano 1996.
- [2] C. Kittel - W.D. Knight - M.A. Ruderman, *La fisica di Berkeley - Meccanica*, Zanichelli, Bologna 1970.
- [3] D.L. Goodstein - J.R. Goodstein, *Il moto dei pianeti intorno al Sole*, Zanichelli, Bologna 1997.

approfondimenti

Il moto simulato per tre pianeti

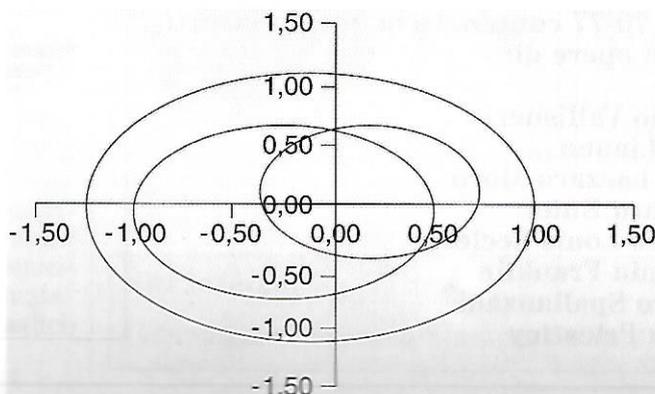
È interessante, dopo aver copiato le formule, studiare il grafico x-y che ne deriva diminuendo l'intervallo di tempo Δt contenuto nella cella A2 e mettendo un numero elevato di punti, in modo da verificare che il grafico corrispondente è un'ellisse (cioè una curva chiusa) solo se si considerano tempi brevi. Inoltre è interessante

studiare i grafici nel piano

v_x - v_y e a_x - a_y .

Con i dati disponibili basta un po' di fantasia per esplorare il modello di moto. Per esempio, se si copiano tutti i dati da C2 a K25 (o quelli che sono) e si riportano a fianco di questi per una o due volte, si ha di fatto la possibilità di simulare il moto di due o tre pianeti orbitanti, qualora si cambino

FIG. 4 Il moto simulato per tre pianeti.



opportunamente le posizioni iniziali x e y e le componenti delle velocità v_x e v_y nelle corrispondenti celle. Il risultato sarà simile a quello mostrato in fig. 4. Infine, una volta determinati i semiassi delle ellissi, è possibile controllare la terza legge di Keplero confrontando la proporzionalità tra periodo di rivoluzione e distanza.

La simulazione del moto planetario col foglio elettronico/2

Nella prima parte di questo articolo, pubblicata sulla rivista *Didattica delle Scienze* n. 217 (gennaio 2002), si è suggerito un metodo per la simulazione del moto planetario. Quell'idea, come già detto, era stata indicata da Richard Feynman in un suo celebre scritto. In questa seconda parte si intende approfondire alcuni aspetti che possono essere significativi dal punto di vista didattico.

FABIO FILIPPI

La terza legge di Keplero

La terza legge di Keplero è una legge empirica. Essa afferma che per tutti i pianeti orbitanti attorno ad un corpo centrale, il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è proporzionale al quadrato del periodo di rivoluzione. In formule:

$$\frac{R^3}{T^2} = K.$$

Supponiamo di aver simulato il moto di tre satelliti, e di aver quindi opportunamente compilato una tabella.

Nella figura 1 sono mostrate le colonne che rappresentano le posizioni dei pianeti che chiameremo, convenzionalmente, «Pianeta 1», «Pianeta 2» e «Pianeta 3».

Le colonne A e B, per il «Pianeta 1», le colonne L e M per il «Pianeta 2» e le colonne U e V, per il «Pianeta 3». Ovviamente nella figura 1 non sono state riportate le colonne rappresentative delle velocità e delle accelerazioni per una questione di spazio, ma non sarà difficile immaginarselo.

L'idea è quindi quella di confrontare il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita di ciascun pianeta, col quadrato del periodo di rivoluzione.

Ci si aspetta che questi rapporti siano uguali tra loro. Per semplificare la trattazione, conviene imporre che le coordinate y dei pianeti siano nulle e che siano nulle anche le componenti x delle velocità iniziali.

Con queste condizioni, l'ellisse descritta dal pianeta ha l'asse orizzontale coincidente con l'asse x e l'asse verticale coincidente con l'asse y (quasi, poiché le traiettorie sono descritte tramite spostamenti rettilinei, che uniscono punti distanti tra di loro 0,1 unità di tempo).

Inoltre, per come è stato impostato tutto il moto, il

que, attraversa due volte l'asse x , in due punti che possono essere considerati il *perielio* e l'*afelio*. L'asse maggiore sarà appunto dato dalla somma di queste ul-

	A	B	C	D	L	M	U	V
1	Dt	t	x	y	x	y	x	y
2	0,10	0,0	0,50	0,00	1,00	0,00	1,50	0,00
3		0,1	0,46	0,15	0,99	0,12	1,50	0,10
4		0,2	0,38	0,29	0,97	0,24	1,49	0,20
5		0,3	0,26	0,40	0,94	0,36	1,47	0,30
6		0,4	0,12	0,47	0,90	0,47	1,46	0,40
7		0,5	-0,03	0,50	0,85	0,58	1,43	0,49
8		0,6	-0,18	0,50	0,80	0,68	1,41	0,59
9		0,7	-0,31	0,45	0,74	0,78	1,38	0,68
10		0,8	-0,43	0,39	0,67	0,87	1,34	0,78
11		0,9	-0,53	0,30	0,59	0,95	1,31	0,87
12		1,0	-0,60	0,20	0,52	1,03	1,27	0,95
13		1,1	-0,65	0,09	0,44	1,10	1,22	1,04
14		1,2	-0,67	-0,02	0,35	1,16	1,18	1,12
15		1,3	-0,68	-0,14	0,27	1,22	1,13	1,20
16		1,4	-0,66	-0,24	0,18	1,27	1,07	1,28
17		1,5	-0,62	-0,34	0,09	1,32	1,02	1,35
18		1,6	-0,57	-0,43	0,00	1,36	0,96	1,43
19		1,7	-0,50	-0,51	-0,08	1,39	0,90	1,50
20		1,8	-0,42	-0,58	-0,17	1,42	0,84	1,56
21		1,9	-0,32	-0,63	-0,26	1,45	0,78	1,63
22		2,0	-0,22	-0,66	-0,35	1,47	0,72	1,69
23		2,1	-0,11	-0,67	-0,43	1,48	0,66	1,75
24		2,2	0,01	-0,66	-0,52	1,49	0,59	1,80
25		2,3	0,12	-0,63	-0,60	1,50	0,52	1,85
26		2,4	0,23	-0,57	-0,68	1,51	0,46	1,90
27		2,5	0,33	-0,49	-0,76	1,51	0,39	1,95
28		2,6	0,41	-0,38	-0,84	1,51	0,32	2,00
29		2,7	0,47	-0,25	-0,92	1,50	0,25	2,04
30		2,8	0,50	-0,11	-0,99	1,49	0,19	2,08
31		2,9	0,49	0,04	-1,06	1,48	0,12	2,12

Fig. 1 Le colonne che descrivono le posizioni occupate dai tre pianeti

time distanze, come si può vedere nell'esempio riportato in figura 2.

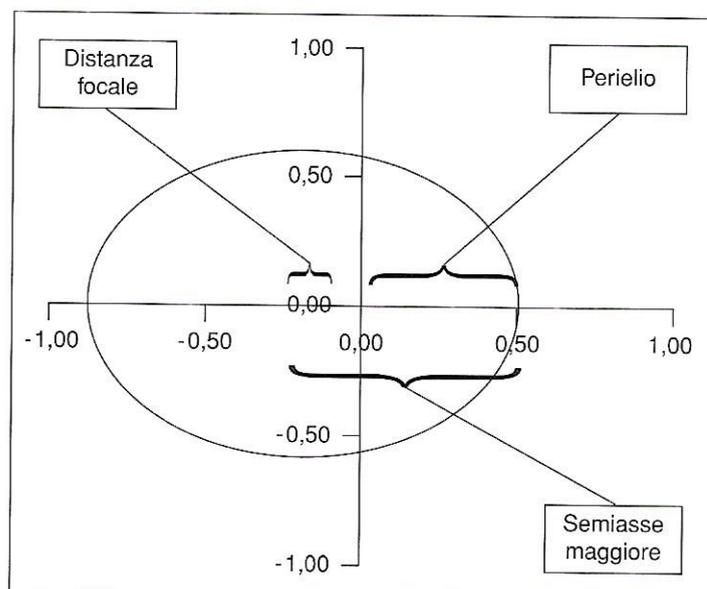


Fig. 2 L'orbita ellittica di un pianeta.

Si possono impostare le nuove formule in una zona libera del foglio elettronico. Nell'esempio riportato in figura 3 sono state usate le celle da AE1 ad AI15.

Per ottenere i valori numerici contenuti in quelle celle, sono stati assegnati ai pianeti i valori iniziali contenuti nella tabella 1.

AF	AF	Q1	Q2	AI
		DISTANZA		
		Pianeta 1	Pianeta 2	Pianeta 3
max		0,50	1,50	1,50
min		0,72	2,53	4,51
asse maggiore		1,22	3,53	6,31
semiasse		0,31	1,30	3,31
fucoco		0,11	0,30	1,51
eccentricità		0,18	0,11	0,50
		Pianeta 1	Pianeta 2	Pianeta 3
R		0,31	1,30	3,31
R^3		0,22	5,30	27,17
T		2,30	15,10	32,60
T^2		7,34	228,31	1062,76
K		0,33	0,33	0,33

Fig. 3 Il calcolo di eccentricità e della costante Kepleriana.

Tabella 1				
	X(0)	Y(0)	V _x (0)	V _y (0)
Pianeta 1	0,5	0	0	1,5
Pianeta 2	1	0	0	1,2
Pianeta 3	1,5	0	0	1

Nella cella AG3 si riporta la formula [=ASS(MAX.VALORI(C2:C500))].

Questa permette di estrarre dalla colonna contenente le 500 posizioni occupate dal Pianeta 1, il valore più grande.

L'operazione implica proprio l'individuazione del perielio, e nella cella comparirà il valore assoluto di questo numero.

Nella cella AG4, analogamente, andrà la formula [=ASS(MIN.VALORI(C2:C500))], la quale opera l'estrazione del valore più piccolo della coordinata x del pianeta (afelio). In questa cella comparirà, quindi, il valore assoluto del numero.

Nella cella AG5, quindi, si inserirà la formula [=AG3+AG4] che permette di determinare l'asse maggiore ed in AG6, ovviamente, la formula [=AG5/2], la quale fornisce il valore del semiassse.

Infine, se si pone nella cella AG7 la formula [=AG6-AG3] e nella cella AG8 la formula [=AG7/AG6], si avranno rispettivamente i valori numerici che si riferiscono alla distanza focale (fig. 2) ed all'eccentricità dell'orbita. Quest'ultimo dato risulta significativo se confrontato con la tabella 2, ed è interessante controllare come varia al variare delle velocità iniziali dei pianeti.

Tabella 2	
Eccentricità: e	Conica
e = 1	Parabola
0 < e < 1	Ellisse
e = 0	Circonferenza
e > 1	Iperbole

Nella cella AG11, ora, sarà possibile inserire la formula [=AG6]. Come si può capire questo è il valore calcolato poco fa per l'asse maggiore che adesso chiamiamo, ma solo per abitudine, R.

Nella cella AG12 ci andrà la formula [=AG11^3], cioè il calcolo del cubo della distanza. Adesso occorre determinare il periodo di rivoluzione. Per fare questo sarà sufficiente osservare quanto tempo «intercorre» tra due ascisse uguali. Se si osserva la figura 1, infatti, si nota che nella cella C2 compare 0,5. Questa è la posizione iniziale del Pianeta 1.

Scorrendo le successive posizioni, si noterà che il numero 0,5 ricompare nella cella C30, cioè di fianco al tempo segnato di 2,8. Vuol dire che il periodo di rivoluzione del Pianeta 1 è 2,8. S'insierà, dunque, quest'ultimo numero nella cella AG13. Nella cella AG14, con la formula [=AG13^2], si calcola il quadrato del periodo

ed infine, nella cella AG15, la formula [=AG12/AG14] permette di determinare il valore della costante di Keplero. Se tutte queste operazioni saranno replicate per il Pianeta 2 e per il Pianeta 3, si potranno confrontare tra loro le costanti così ottenute e quindi controllare la terza legge.

Le traiettorie non ellittiche

Le traiettorie seguite dai satelliti possono essere solo coniche. Da questo punto di partenza si cerca il modo di ottenere orbite circolari e paraboliche ed iperboliche. Il problema è essenzialmente legato alla velocità iniziale.

Prendiamo in esame la possibilità di simulare un'orbita circolare (si veda fig. 4). In questo caso, se il pianeta si trova ad una distanza r dal corpo di massa M attorno al quale ruota, allora esso è sottoposto ad un'accelerazione centripeta $g = G \frac{M}{r^2}$.

D'altra parte, la velocità, in un moto circolare uniforme, è legata all'accelerazione centripeta nel modo seguente: $v = \sqrt{a_{\text{centripeta}} r}$. Pertanto, sostituendo, si ottiene che la velocità iniziale del pianeta, affinché percorra un'orbita circolare è:

$$v_{\text{orbita circolare}} = \sqrt{G \frac{M}{r}} \quad (1)$$

Le traiettorie paraboliche ed iperboliche (entrambe orbite aperte) si ottengono richiedendo che il pianeta sfugga all'attrazione gravitazionale del corpo centrale, in maniera definitiva. Vale a dire, occorre conferire al pianeta un'energia cinetica sufficiente a vincere l'energia potenziale gravitazionale. Per risolvere questo problema, conviene affidarsi al principio di conservazione dell'energia meccanica: *la somma di energia cinetica ed energia potenziale per un sistema isolato, rimane costante*. Dunque, se il pianeta si trova inizialmente ad una distanza r , l'applicazione del principio equivale ad imporre che la somma di energia cinetica iniziale ed energia potenziale gravitazionale a questa distanza, sia uguale alla somma di energia cinetica finale ed energia potenziale gravitazionale finale, dove per *finale* s'intende l'infinito matematico.

Dal momento che l'energia potenziale gravitazionale è definita operativamente in maniera tale che essa sia nul-

la all'infinito, rimane da stabilire quale debba essere la velocità del pianeta all'infinito. Esistono solo due casi: a) velocità residua nulla e b) velocità residua diversa da zero. Nel primo caso la traiettoria seguita dal satellite sarà una parabola e nel secondo caso sarà un'iperbole. In formule:

$$(E_{\text{totale}})_{\text{a distanza } r} = (E_{\text{totale}})_{\text{all'infinito}} \quad (2)$$

Cioè, nel caso a)

$$\frac{1}{2} m v_{\text{iniziale}}^2 - G \frac{Mm}{r} = 0 - 0 \quad (3)$$

che, risolta rispetto alla velocità:

$$v_{\text{iniziale}} = \sqrt{2G \frac{M}{r}} \quad (4)$$

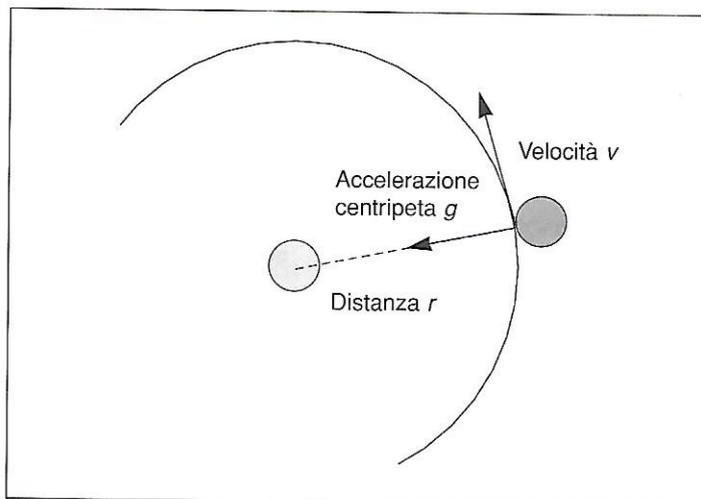


Fig. 4 Il moto di un pianeta in un'orbita circolare.

La velocità che compare in questa formula è chiamata anche *velocità di fuga*.

Dunque, se la velocità iniziale è pari alla velocità di fuga, allora la traiettoria seguita dal pianeta sarà una parabola: esso giungerà all'infinito con velocità residua nulla.

Per tutte le velocità iniziali che siano più grandi della velocità di fuga, la traiettoria seguita dal pianeta sarà un'iperbole (esso giungerà all'infinito con velocità residua diversa da zero).

Per quanto riguarda la simulazione, occorre ricordare che tutto il lavoro è

stato impostato con la seguente semplificazione: una scelta opportuna delle unità di misura in modo tale che $GM = 1$.

Allora le formule si trasformano in quelle contenute nella tabella 3.

Tabella 3

Velocità iniziale	Tipo di traiettoria
$v = \sqrt{\frac{1}{r}}$	Circolare
$v = \sqrt{\frac{2}{r}}$	Parabolica
$v > \sqrt{\frac{2}{r}}$	Iperbolica

I pianeti della nostra simulazione hanno coordinate x iniziali dal corpo centrale, rispettivamente: Pianeta 1: $x = 0,5$, Pianeta 2: $x = 1$ e Pianeta 3: $x = 1,5$, come si può vedere nella figura 1. Poiché, per semplificare l'approccio alla simulazione s'impone che le coordinate y iniziali siano nulle, risulterà chiaro che le coordinate x iniziali corrisponderanno alle *posizioni* iniziali r . La tabella 4 rappresenta uno schema riassuntivo dei valori numerici da assegnare alle velocità, in relazione alle formule ricavate, ed in funzione del tipo di traiettoria da simulare.

Nella figura 5 è mostrata la simulazione del moto dei tre pianeti con tre delle quattro traiettorie possibili. L'unica incertezza che potrebbe persistere è che la traiettoria seguita dal Pianeta 3 sia proprio una parabola, visto che nella cella corrispondente all'eccentricità (AIS), non compare 1, come dovrebbe. Ciò è essenzialmente dovuto alla modalità con cui si è scelto di determinare questo parametro: rapporto tra la distanza focale ed il semiasse maggiore. Visto che si sta facendo l'ipotesi che la curva è una parabola, calcoliamone l'equazione, che sarà del tipo $x = ay^2 + by + c$. L'operazione è possibile poiché conosciamo le coordinate del fuoco $F(0;0)$ e quelle del vertice $V(1,5;0)$ ed è noto che per la parabola generica valgono le condizioni:

$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) \text{ e } V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right).$$

Dopo semplici passaggi si ottiene l'equazione desiderata: $x = -\frac{y^2}{6} + \frac{3}{2}$ (si noti, in figura 4, che effettivamente la parabola taglia l'asse y nel punto di ordinata 3).

A questo punto si può costruire una nuova colonna di dati in cui si calcola il valore teorico della posizione x del pianeta, mediante l'equazione della parabola, in funzione dei valori noti di y . Si avrà, dunque, la possibilità di confrontare la colonna delle x vere (quelle che sono servite ad effettuare il grafico della traiettoria del Pianeta 3) con la colonna delle x teoriche (quelle dedotte tramite l'equazione della parabola). Queste devono essere uguali. Per verificarlo sarà sufficiente costruire

un'ultima colonna che contenga i rapporti tra i valori dell'una e dell'altra. Evidentemente in quest'ultima colonna devono comparire solamente degli 1.

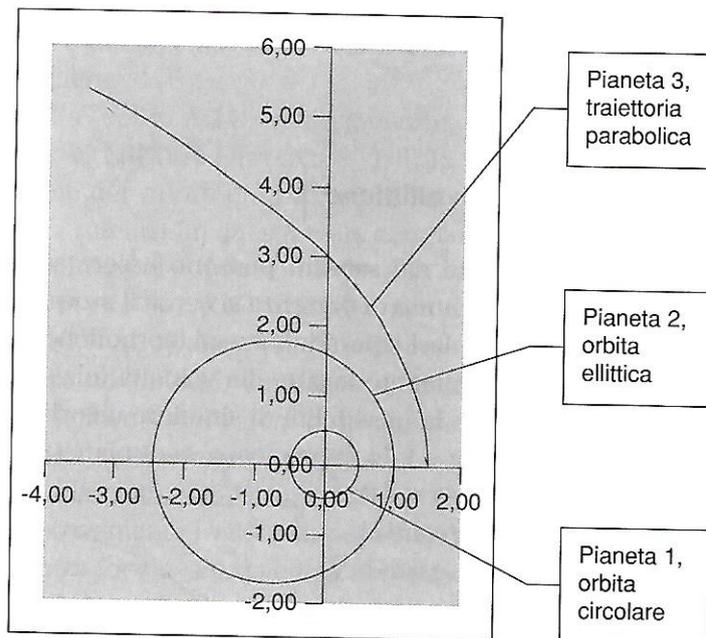


Fig. 5 Il moto dei tre pianeti con i tre moti diversi dei quattro possibili.

Se la forza fosse repulsiva

L'attività didattica fin qui proposta, permette di fare un'ulteriore esplorazione. Si è parlato di forze attrattive che dipendono dall'inverso del quadrato della distanza, come la forza d'interazione gravitazionale.

Anche l'interazione tra particelle cariche, tuttavia, è descritta da una formula che ha la stessa struttura matematica della legge di gravitazione universale di Newton. La legge di Coulomb, infatti, può essere scritta nel seguente modo $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$, dove $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ è un'opportuna costante, Z il numero atomico ed e la carica dell'elettrone. Allora l'interazione tra un nucleo molto pesante (po-

Tabella 4

Se la distanza dal corpo centrale r è	Per ottenere un'orbita circolare deve essere $v = \sqrt{\frac{1}{r}}$	Per ottenere una traiettoria parabolica deve essere $v = \sqrt{\frac{2}{r}}$	Per ottenere una traiettoria iperbolica deve essere $v > \sqrt{\frac{2}{r}}$
0,5	1,4142	2	> 2
1	1	1,4142	> 1,4142
1,5	0,8165	1,1547	> 1,1547

sitivo) ed una particella carica (positiva) è di tipo repulsivo. Con tale premessa, ci si può avvicinare agli esperimenti sulla diffusione delle particelle α (nuclei di elio) condotti da Geiger e Marsden nel 1909. Essi bombardarono una sottile lamina d'oro con particelle ed osservarono che alcune di esse (circa 1 su 8000) venivano deflesse ad angoli molto grandi, talvolta superiori a 90° e in alcuni casi uguali a 180° . Questi risultati contrastavano con il modello atomico che J. J. Thomson aveva elaborato nel 1903. Egli suggeriva infatti l'idea che la carica atomica fosse distribuita in maniera più o meno uniforme all'interno dell'atomo. Fu il fisico neozelandese Ernest Rutherford che nel 1911 diede un'interpretazione significativa dell'esperimento di Geiger e Marsden «... fu proprio il più incredibile evento che sia mai accaduto nella mia vita ... Fu quasi come se voi sparaste con un cannone del calibro di 15 pollici contro un sottile pezzo di carta e il proiettile ritornasse indietro e vi colpisse... (It was almost as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you)».

Questo fatto lo portò a dedurre che il nucleo atomico doveva essere piccolo e che la massa dell'atomo doveva essere concentrata praticamente tutta in un punto. Per gli scopi che ci siamo prefissati, è quindi possibile effettuare la simulazione delle deflessioni, supponendo che

la scelta delle unità di misura della costante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ della carica elettrica, sia tale da poter ricondurre tutta la trattazione relativa all'interazione coulombiana a quella newtoniana fin qui svolta.

Questo si traduce nel fatto che le traiettorie delle particelle si possono ottenere semplicemente cambiando il segno alle accelerazioni, ed immaginando di lanciare tre particelle cariche verso un nucleo molto pesante posto nell'origine del sistema di riferimento (vedi fig. 6). Le particelle si possono porre tutte alle stesse distanze orizzontali, ma in posizioni verticali diverse, rispetto all'origine, ed in modo tale che abbiano tutte le stesse velocità iniziali.

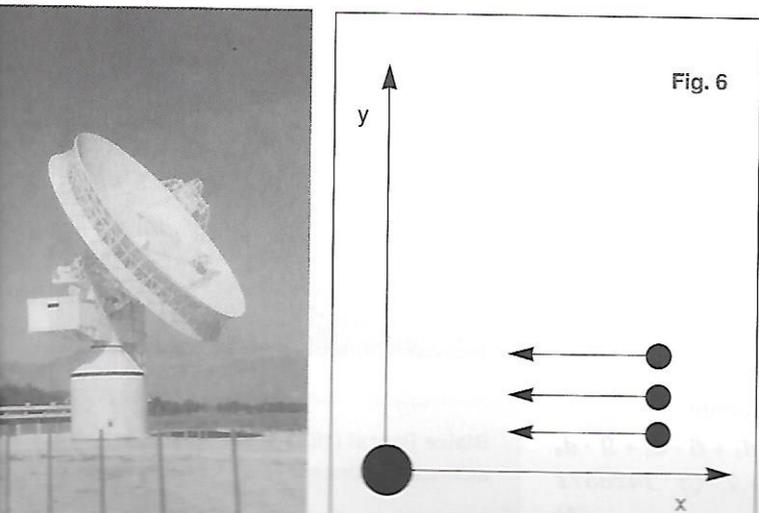


Fig. 6

Tabella 5 - Posizioni e velocità iniziali				
	X(0)	Y(0)	V _x (0)	V _y (0)
Particella 1	0,5	0,1	-1	0
Particella 2	0,5	0,5	-1	0
Particella 3	0,5	1	-1	0

Occorre, dunque, modificare il segno della forza. Per fare questo è sufficiente cambiarlo nelle colonne G ed H, per la Particella 1 (ex-Pianeta 1) P e Q per la Particella 2 e Y e Z per la Particella 3. Nella cella G2 anziché esserci la formula [=C2*K2], ci andrà [=C2*K2]. Si dovranno cambiare quindi le altre celle, e colonne, corrispondenti alle componenti x e y delle accelerazioni. Completate queste modifiche, lo stato iniziale sarà rappresentato dalla tabella 5. In figura 7 è mostrato il grafico delle deflessioni delle particelle in esame. Si nota che la particella la cui traiettoria è più prossima al nucleo, è deviata ad un angolo più grande di 90° .

Fabio Filippi

Liceo Scientifico «A. Einstein» - Rimini

Bibliografia

Giorgio Dragoni, Silvio Bergia, Giovanni Gottardi, *Dizionario biografico degli scienziati*, CD-ROM, Zanichelli, Bologna 1999.

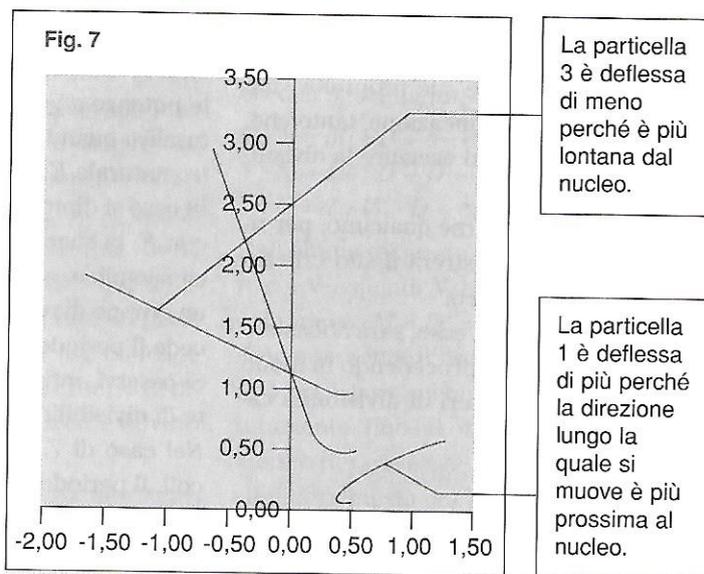


Fig. 6 A destra. Tre particelle cariche si muovono da destra a sinistra verso un nucleo anch'esso carico. A sinistra. Installazione del «Telespazio» nella Conca del Fucino in Abruzzo.

Fig. 7 La simulazione della diffusione di tre particelle da parte di un nucleo carico posto nell'origine delle coordinate.

La simulazione del moto planetario col foglio elettronico/3

Nella prima parte di questo articolo, pubblicata sulla rivista *Didattica delle Scienze* n. 217, si era suggerito un metodo per la simulazione del moto planetario. L'idea, indicata da Richard Feynman in un suo celebre scritto, veniva poi approfondita nella seconda parte (n. 222) con l'esplorazione della terza legge di Keplero, le traiettorie non ellittiche e le forze di tipo repulsivo. In quest'ultima parte si intende mettere in risalto un aspetto poco conosciuto ma significativo dal punto di vista didattico.

FABIO FILIPPI

Forza direttamente proporzionale alla distanza

Se un corpo è soggetto ad una forza di tipo centrale, forza che sia proporzionale alla distanza, allora *anche* in questo caso esso seguirà un'orbita chiusa, in particolare un'ellisse.

Più precisamente, esistono soltanto due tipi di campo centrale in cui tutte le traiettorie dei moti finiti sono chiuse. Sono i campi in cui l'energia potenziale della particella è proporzionale a $1/r$ o a r^2 . Poiché la forza può essere definita come la rapidità cambiata di segno con cui varia l'energia potenziale, si ottengono, per i campi menzionati, rispettivamente una forza proporzionale a $-1/r^2$ ed una forza proporzionale a $-r$. Mentre il primo caso ha come controparte fisica la ben nota legge di gravitazione universale di Newton, il secondo caso corrisponde ad un sistema fisico un po' meno noto, il cosiddetto oscillatore spaziale. In appendice è mostrata una dimostrazione rigorosa che l'equazione differenziale associata al sistema fisico in esame ha come soluzione una traiettoria ellittica o iperbolica a seconda del segno della forza applicata.

Qui semplificheremo il problema proponendo un modello rappresentativo del moto, costruendo in maniera opportuna un foglio elettronico e simulando l'ipotetica orbita. L'idea di fondo è che il moto orbitale è un moto periodico. Un oscillatore lineare è associato ad una funzione periodica (sinusoidale, per esempio). Pertanto, sovrapponendo i moti di due oscillatori lineari, uno per l'asse x ed un altro per l'asse y , si ha la traiettoria richiesta. Per inciso, l'ellisse in forma parametrica è ef-

no e coseno. In figura 1 è riportata una semplicissima impostazione possibile. Nella colonna B, sono stati inseriti gli istanti di tempo successivi a quello iniziale, incrementati di una quantità Dt dichiarata nella cella A2. Nelle celle C2 e D2, due coefficienti numerici legati all'eccentricità; se $a = b$ si ha una circonferenza. Nella cella E2, come si può vedere nella figura 1, la formula $[C2 * COS(B2)]$ e nella cella F2 l'analogo $[D2 * SEN(B2)]$. Nella figura 2 è riportata la rappresentazione grafica dell'ellisse così ottenuta.

	A	B	C	D	E	F
	Dt	t	a	b	x	y
2	0,1	0,1	2	1	1,990008	0,099833
3		0,2			1,960133	0,198669
4		0,3			1,910673	0,29552
5		0,4			1,842122	0,389418
6		0,5			1,755165	0,479426
7		0,6			1,650671	0,564642
8		0,7			1,529684	0,644218
9		0,8			1,393413	0,717356
10		0,9			1,24322	0,783327
11		1			1,080605	0,841471
12		1,1			0,907192	0,891207
13		1,2			0,724716	0,932039
14		1,3			0,534998	0,963558
15		1,4			0,339934	0,98545
16		1,5			0,141474	0,99749
17		1,6			-0,0584	0,999574
18		1,7			-0,25769	0,99165
19		1,8			-0,4544	0,97384
20		1,9			-0,64658	0,9463
21		2			-0,83229	0,90929
22		2,1			-1,00969	0,86320
23		2,2			-1,177	0,80849

Fig. 1 L'impostazione del foglio elettronico per la simulazione del moto.

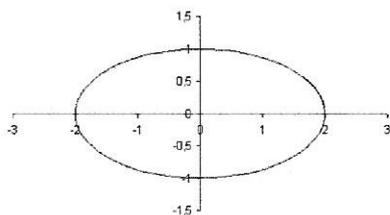


Fig. 2 L'ellisse generata dalla sovrapposizione di una funzione seno con una funzione coseno.

A questo punto occorre confrontare i moti fra di loro: quelli ottenuti tramite la forza dipendente da $1/r^2$ con quelli ottenibili con la forza dipendente da r . D'ora in poi l'esposizione farà riferimento al foglio elettronico discusso nelle precedenti parti citate e pubblicate in questa rivista. Si ricorda solamente che la simulazione si basava sulla costruzione del grafico relativo all'orbita in termini di posizioni x e y , a loro volta definite proprio dalle componenti dell'accelerazione.

Se la forza fosse direttamente proporzionale alla distanza, allora l'equazione che descrive il moto diventa: $m\ddot{a} = -GMmr^2$. Quindi, scrivendo l'equazione data nelle sue componenti si ottiene:

$$a_x = -GMx \quad \text{e} \quad a_y = -GM y.$$

Per quanto riguarda la simulazione, sarà sufficiente cambiare tutte e sole le formule relative alle accelerazioni. Per esempio: nella cella E2 c'era $[-C2*K2]$. Si cancella quindi solo K2 (il cui valore associato era il termine newtoniano, mentre in C2 c'era la posizione attuale del pianeta) e si copia.

In figura 3 sono mostrate le due orbite seguite dallo stesso pianeta nel caso in cui l'interazione dipenda dall'inverso del quadrato della distanza (orbita più schiacciata) e nel caso in cui essa dipenda linearmente dalla distanza.

Nelle figure 4 e 5 sono messe a confronto le orbite corrispondenti agli stessi pianeti.

Come è possibile allora decidere se le orbite reali sono newtoniane oppure no?

Si ricorderà che la legge di gravitazione universale è insita nella terza legge di Keplero. Infatti, nell'approssimazione di un'orbita circolare, un pianeta è sottoposto ad un'accelerazione centripeta del tipo:

$$a_c = 4\pi^2 \frac{r}{T^2}. \quad (1)$$

Poiché la forza dipende da $1/r^2$, l'accelerazione centripeta potrà essere espressa da:

$$a_c = \frac{k}{r^2}. \quad (2)$$

Uguagliando i secondi membri di queste due equazioni, si ottiene $\frac{r^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2}$, che è sostanzialmente la terza legge

di Keplero. Invece nell'ipotesi della dipendenza della forza da r , l'accelerazione centripeta sarà del tipo:

$$a_c = kr. \quad (3)$$

Uguagliando il secondo membro della (3) con il secondo membro della (1) si ottiene: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, cioè l'indipendenza del periodo di rivoluzione dal raggio dell'orbita. Questo significa che a pianeti più lontani corrisponde una velocità più grande. Non vale dunque una delle leggi sperimentali più note, quella che Keplero costruì immaginando complesse armonie.

Il foglio elettronico impostato con l'ipotesi della dipendenza lineare tra forza e distanza, permette di verificare che i pianeti si muoverebbero all'unisono, percorrendo ognuno la propria traiettoria nel cielo, ma in un unico lasso di tempo, uguale per tutti.

Appendice di matematica

Il problema può essere enunciato in questo modo: una massa m è attratta da un punto fisso posto in O con una forza direttamente proporzionale alla distanza e con costante di proporzionalità k^2r . All'istante iniziale, il punto si trovava ad una distanza a dal centro O e aveva velocità iniziale v_0 , perpendicolare alla retta congiungente la posizione iniziale col centro O . Si tratta di risolvere un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. È un problema di Cauchy, che può essere risolto con l'ausilio delle trasformate di Laplace.

Per la componente x sarà:

$$m\ddot{x} = -k^2mx \quad (4)$$

con le condizioni al contorno $x(0) = a$ e $\dot{x}(0) = 0$.

Fig. 3 Il moto di un pianeta nei due casi: newtoniano (orbita più schiacciata) e lineare.

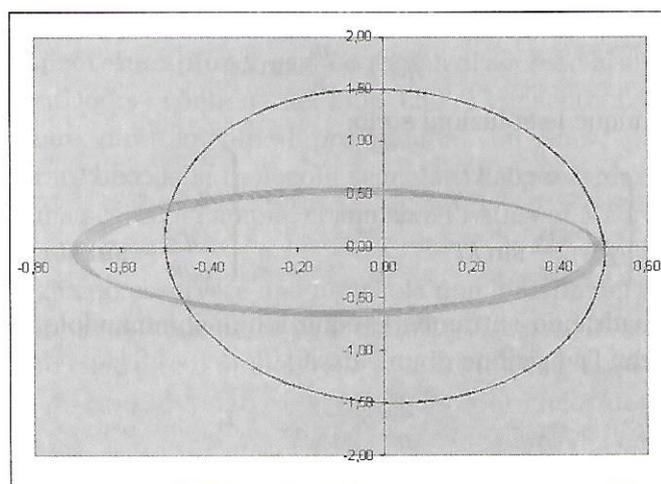
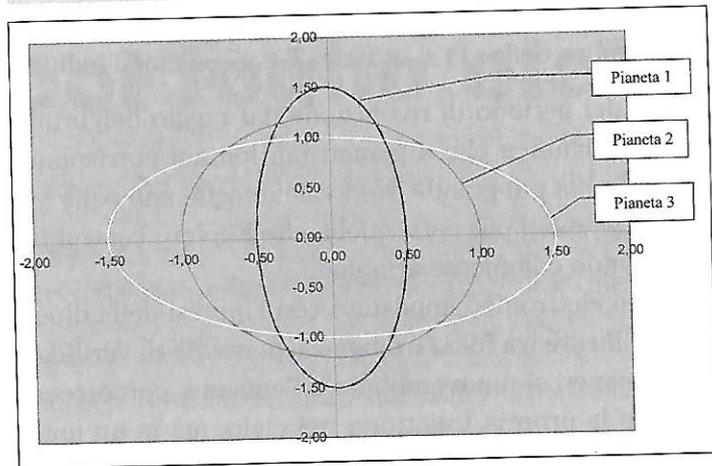


Fig. 4 Le orbite di tre pianeti nel caso di una forza direttamente proporzionale alla distanza.



Semplificando le masse e passando alla trasformata di Laplace di $x(t) \div \xi(p)$, sarà:

$\ddot{x}(t) = p^2 \xi(p) - px(0) - \dot{x}(0)$, che per le condizioni al contorno diventa:

$$\ddot{x}(t) = p^2 \xi(p) - ap.$$

Sostituendo nell'equazione (1) e tralasciando l'esplicito riferimento alla variabile indipendente, si ottiene:

$$p^2 \xi - ap + k^2 \xi = 0, \text{ da cui:}$$

$$\xi = \frac{ap}{p^2 + k^2}, \quad (5)$$

la cui antitrasformata di Laplace è:

$$\xi(p) \div a \cos kt. \quad (6)$$

Per la componente y , analogamente, si avrà l'equazione differenziale:

$$m\ddot{y} = -k^2 my \quad (7)$$

con le condizioni al contorno $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = v_0$. Procedendo allo stesso modo si ha $\dot{y}(t) \div \eta(p)$ e dunque $\dot{y}(t) = p^2 \eta(p) - py(0) - \dot{y}(0)$, da cui, per le condizioni al contorno l'equazione (3) diventa $p^2 \eta - v_0 + k^2 \eta = 0$. Quindi:

$$\eta = \frac{v_0}{k} \frac{k}{p^2 + k^2}, \quad (8)$$

la cui antitrasformata di Laplace è:

$$\eta(p) \div \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (9)$$

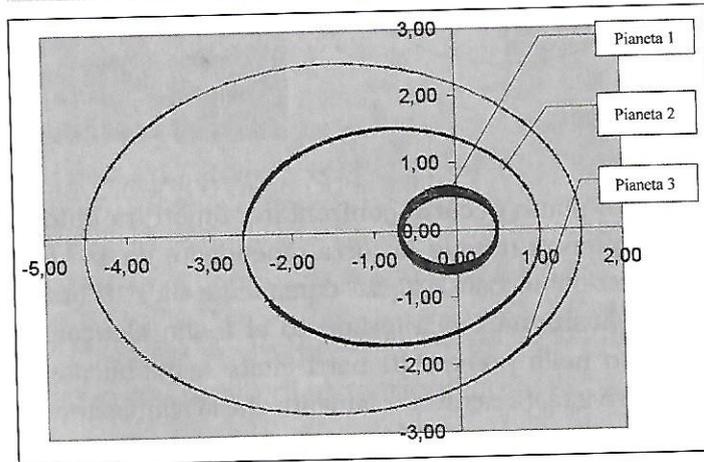
Dunque le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = a \cos kt \\ y = \frac{v_0}{k} \sin kt \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos kt \\ \frac{y}{v_0/k} = \sin kt \end{cases} \quad (10).$$

Quadrando entrambe le equazioni e sommandole si ottiene l'equazione di un'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{v_0^2/k^2} = 1,$$

Fig. 5 Le orbite di tre pianeti sottoposti ad una forza newtoniana.



Se la forza centrale fosse repulsiva, anziché attrattiva con le stesse condizioni al contorno, nelle equazioni (1) e (2) cambierebbero solo i segni al secondo membro $m\ddot{x} = k^2 mx$ e $m\ddot{y} = k^2 my$. Queste forniscono le soluzioni,

rispettivamente $\xi = a \frac{p}{p^2 - k^2}$ e $\eta = \frac{v_0}{k} \frac{k}{p^2 + k^2}$.

Passando alle antitrasformate di Laplace si ottengono le soluzioni:

$$\begin{cases} x = a \cosh kt \\ y = \frac{v_0}{k} \sinh kt. \end{cases}$$

Analogamente, dividendo entrambe le equazioni per i coefficienti, quadrando e sottraendo, si ottiene l'equazione di un'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{v_0^2/k^2} = 1$$

tenendo conto dell'identità $\cosh^2 kt - \sinh^2 kt = 1$.

Fabio Filippi

Liceo Scientifico «Albert Einstein» - Rimini

Riferimenti bibliografici

A.M. Lombardi, *Keplero, I grandi della scienza*, «Le scienze» febbraio 2000.
 L.D. Landau, E.M. Lifschits, *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma 1991.
 F. Filippi, *La simulazione del moto planetario col foglio elettronico/1*, «Didattica delle Scienze», n. 217, gennaio 2002, La Scuola, Brescia.
 F. Filippi, *La simulazione del moto planetario col foglio elettronico/2*, «Didattica delle Scienze», n. 222, novembre 2002, La Scuola, Brescia.